具有循环反馈的Lurie控制系统绝对稳定性及在混沌同步中的应用*

廖晓昕[1,2,3] 罗海庚[1] 赵新泉[3] 沈 轶[1] 曾志刚[2]

1. 华中科技大学控制科学与工程系，武汉 430074；2. 武汉理工大学，武汉 430070；
3. 中南财经政法大学，武汉 430069

摘要 研究了反馈变量是状态变量的隐式形式的两个Lurie系统所形成的M-S误差系统的绝对稳定性，得到了平衡位置绝对稳定的充要条件及一系列代数充分条件，当绝对稳定性的充要条件和充分条件都不满足时，提出了绝对镇定的概念，即加以某种尽可能简便的反馈控制项实现误差系统的绝对稳定，给出了具体的设计方案. 最后，作为应用，研究了两个Chua氏混沌电路形成的误差系统，如何化为Lurie系统形式，实现两个Chua电路的全局同步.

关键词 Lurie控制系统 循环反馈 绝对稳定 混沌系统 Chua氏电路 全局同步

自从20世纪60年代美国气象学家Lorenz首先发现Lorenz混沌吸引子以来[1-3]，混沌现象已在许多自然科学和社会科学领域内受到普遍关注. 70年代，德国物理学家Rössler又发现了6类Rössler混沌吸引子[4,5]. 80年代，美国著名电子学家Chua发现了著名的Chua氏混沌电路[6,7]，这是第一个真正用物理手段实现的混沌吸引子. 90年代至今，中国学者相继发现了Chen吸引子[8]、Lü吸引子[8]，以及最近的Liu和Chen混沌系统[9]、Liu吸引子[10]，Yang吸引子[11]，还不断有新的混沌吸引子发现.

由于混沌系统对初始值极端敏感，长期以来，人们认为混沌系统不可控，两个混沌系统更不可能同步. 但自从1990年Ott首次发表了"控制混沌"的论文[12]，特别是1990年美国海军实验室的Pecora和Carroll用电子电路实现混沌同步[13,14]且应用于保密通讯之后，不仅改变了人们固有的观念，更掀起了全世界研究混沌控制与混沌同步的热潮，论文层出不穷，且已有专著出版. 但是，混沌控制和同步的一般理论和方法，人们尚在探索和试创过程中. 为此，Int. J. of Bifur. & Chaos杂志的主编Chua等首先建议将混沌同步纳入Lurie控制系统绝对稳定性的理论框架，寻求一般方法，并已有一些研究工作[15-17]，我们也在此基础上做过一些工作[18-20].

因为同步问题本质上是两个动力系统的相对稳定性问题，相对稳定的概念虽早已出现[21]，但成果极少. 而Lurie控制系统绝对稳定性的研究，已有半个多世纪，积累了相当丰富的成果，可借鉴的理论、方法和思想颇多[22].

此外，近期看到一些关于电力系统稳定性的文献报道[23,24]，也是借助于Lurie绝对稳定性的方法.

本文将廖晓昕[25-27]、年晓红[28,29]等曾经获得的Lurie直接控制、间接控制和临界控制系统绝对稳定的充要条件及一系列充分条件，进一步推广到具有循环反馈的一般Lurie系统，给出绝对稳定的充要条件及一系列简明的代数充分条件. 将所获得的方法和结果，用来分析两个Lurie系统(无论是否

2005-03-22收稿，2005-10-31收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号：60274007，60474011，60405002，60574025)和高等学校博士点基金(批准号：20010487005)资助项目

E-mail：xiaoxin_liao@hotmail.com

混沌)形成的误差系统的绝对稳定性，在不满足绝对稳定的条件时，提出了如何设计尽可能简单可行的反馈控制方案，实现绝对镇定和全局同步. 作为实例，分析将两个 Chua 氏电路分别作为发射和接收系统而形成的误差系统，通过变换化成标准的 Lurie 系统，然后利用经典的 S 方法，得到两个 Chua 氏电路全局同步的结果.

1 问题的一般表达

考虑两个一般的 Lurie 控制系统形成的 Master-Slave 型系统：

$$\text{Master}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\xi_1+\boldsymbol{d}f(\sigma)\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t}=f(\sigma)\\ \sigma=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-r\xi_1-Nf(\sigma)\,,\end{cases}\tag{1}$$

$$\text{Slave}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\xi_2-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\tilde{\boldsymbol{b}}(\xi_1-\xi_2)+\\ \qquad \boldsymbol{d}f(\hat{\sigma})-\tilde{\boldsymbol{d}}[f(\sigma)-f(\hat{\sigma})]\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t}=f(\hat{\sigma})-\alpha[f(\sigma)-f(\hat{\sigma})]\\ \hat{\sigma}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-r\xi_2-Nf(\hat{\sigma})\,,\end{cases}\tag{2}$$

这里，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$；$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$；$N$，$r$，$\alpha\in\mathbb{R}^1$；$\xi_1$，$\xi_2\in\mathbb{R}^1$；$\tilde{\boldsymbol{b}}$，$\tilde{\boldsymbol{d}}\in\mathbb{R}^n$. 其中 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，$\tilde{\boldsymbol{b}}(\xi_1-\xi_2)$，$\tilde{\boldsymbol{d}}(f(\sigma)-f(\hat{\sigma}))$，$\alpha(f(\sigma)-f(\hat{\sigma}))$ 为反馈控制项. 令 $F=\left\{f\mid f(0)=0,\ 0\leqslant\dfrac{f(\sigma)}{\sigma}\leqslant k,\ f\in C[\mathbb{R},\mathbb{R}]\right\}$ 在(1)式中，若 $N=0$，$\boldsymbol{d}=0$，(1)式是 Lurie 间接控制系统[22]；若没有后一个标量方程且 $N=\xi_1=0$，$\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{A}$ 为 Hurwitz 矩阵，则(1)式是 Lurie 直接控制系统[22]；若没有后一个标量方程且 $N=\xi_1=0$，$\boldsymbol{b}=0$，$\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})\leqslant 0$，$\boldsymbol{A}$ 仅有一个零特征值，其他特征值都具有负实部，则(1)式是 Lurie 临界控制系统[22].

上述3种控制系统中，如果 $N=0$，则反馈变量 σ 是状态变量的线性组合，而当 $N\neq 0$，反馈变量 σ 与状态变量是一种隐式关系. 但也更能反映实际控制过程.

设 $|\sigma^*+NF(\sigma^*)|$ 正定，显然当 $N\geqslant 0$，$|\sigma^*+NF(\sigma^*)|$ 正定，当 $N<0$，$|F(\sigma^*)|<\dfrac{1}{|N|}|\sigma^*|$ 或 $|F(\sigma^*)|>\dfrac{1}{N}|\sigma^*|$，可使 $|\sigma^*+NF(\sigma^*)|$ 正定.

令 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)$，$\xi(t)=\xi_1(t)-\xi_2(t)$，$\sigma^*(t)=\sigma(t)-\hat{\sigma}(t)$，则可得到 Lurie 型误差动力系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{e}(t)+(\boldsymbol{b}+\tilde{\boldsymbol{b}})\xi(t)+\\ \qquad \boldsymbol{d}F(\sigma^*)+\tilde{\boldsymbol{d}}F(\sigma^*)\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}=F(\sigma^*)+\alpha F(\sigma^*)\\ \sigma^*=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi-NF(\sigma^*)\,,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $0\leqslant\dfrac{F(\sigma^*)}{\sigma^*}=\dfrac{f(\sigma)-f(\hat{\sigma})}{\sigma-\hat{\sigma}}=\dfrac{f(\sigma^*+\hat{\sigma})-f(\hat{\sigma})}{\sigma-\hat{\sigma}}\leqslant k$，$\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}(t)$，$\tilde{\boldsymbol{b}}\xi(t)$，$\tilde{\boldsymbol{d}}F(\xi)$，$\alpha F(\sigma^*)$ 为反馈控制项.

令 $\mathbb{Q}=\{\boldsymbol{e},\xi\,\|\,\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi\mid=0\}$，简记 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{e}(t,t_0,\boldsymbol{e}(t_0))$，$\xi(t)=\xi(t,t_0,\xi(t_0))$.

定义 1 若 $\forall F\in\mathbb{F}$，(3)式的零解是全局渐近稳定的，称(3)式的零解是绝对稳定的，Master-Slave 系统(1)与(2)是全局同步的.

定义 2 称(3)式的零解关于集合 $\mathbb{Q}$ 是绝对稳定的，若 $\forall F(\sigma^*)\in\mathbb{F}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)$，当 $\|\boldsymbol{e}(t_0)\|+|\xi(t_0)|<\delta$，有 $|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|<\varepsilon$，且 $\forall(\boldsymbol{e}_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$，有 $|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|\to 0$，当 $t\to+\infty$.

定义 3 称函数 $V(\boldsymbol{e},\xi)\in C[\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}]$，关于集合 $\mathbb{R}$ 正定[负定]，若

$$V(\boldsymbol{e},\xi)\begin{cases}=0, & \text{当 }\boldsymbol{e},\xi\in\mathbb{Q}\\ >0[<0], & \text{当 }\boldsymbol{e},\xi\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

定义 4 称关于集合 $\mathbb{Q}$ 正定的函数 $V(\boldsymbol{e},\xi)\in C[\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}]$，关于集合 $\mathbb{Q}$ 是径向无界的，若 $V(\boldsymbol{e},\xi)\to+\infty$，当 $\|\boldsymbol{e},\xi\|\to+\infty$.

定义 5 称(3)式的零解关于 $\sigma^*=0$ 绝对稳定，若 $\forall F\in\mathbb{F}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $|\sigma_0^*|<\delta$，有 $|\sigma^*(t,t_0,\sigma_0^*)|<\varepsilon$ 且 $\forall\sigma_0^*\in\mathbb{R}^1$，$\sigma^*(t,t_0,\sigma_0^*)\to+\infty$，当 $t\to+\infty$.

2 误差系统绝对稳定及 M-S 系统全局同步

本节，我们将给出(3)式绝对稳定的充要条件，

从而这些也是M-S系统(1)与(2)全局同步的充要条件.

为了行文的简便，先考虑未加反馈控制的系统(3)，即$\boldsymbol{K}=0$，$\tilde{\boldsymbol{b}}=0$，$\tilde{\boldsymbol{d}}=0$，$\alpha=0$的情形，得到一些基本结果. 然后，加上反馈，$\boldsymbol{K}\neq 0$，$\tilde{\boldsymbol{b}}\neq 0$，$\tilde{\boldsymbol{d}}\neq 0$，$\alpha\neq 0$使之满足这些基本结果所要求的条件.

定理1 未加反馈控制的Lurie系统(3)(即$\boldsymbol{K}=0$，$\tilde{\boldsymbol{b}}=\tilde{\boldsymbol{d}}=0$，$\alpha=0$)的零解关于集合$\mathbb{Q}$绝对稳定的充要条件是(3)式的零解关于$\sigma^*=0$绝对稳定.

证 当$N=0$，这是显然的结果，因为$\sigma^*=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi=0$，这时$\sigma^*$已表示成状态变量的显式形式.

现证$N\neq 0$的情况.

充分性 设(3)式的零解关于$\sigma^*=0$绝对稳定，因为$F(0)=0$，且$F(\sigma^*)$连续，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当$|\sigma_0^*|<\delta$，有$|\sigma^*(t,t_0,\sigma_0^*)|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|NF(\sigma^*(t,t_0,\sigma_0^*))|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|\leqslant|\sigma^*(t,t_0,\sigma_0^*)|+|NF(\sigma^*(t,t_0,\sigma_0^*))|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$\forall(\boldsymbol{e}(t_0),\xi(t_0))\in\mathbb{R}^{n+1}$，$\lim\limits_{t\to+\infty}|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}|\sigma^*(t)|+\lim\limits_{t\to+\infty}|NF(\sigma^*(t))|=0$，故(3)式的零解关于集合$\mathbb{Q}$绝对稳定.

必要性 设(3)式的零解关于集合$\mathbb{Q}$绝对稳定. 因为$|\sigma^*+NF(\sigma^*)|$是σ^*的正定函数，由正定函数与K类函数的关系(见文献[22]引理1.15，1.16)可知，存在K类函数$\varphi(\sigma^*)$使得

$$\varphi(|\sigma^*|)\leqslant|\sigma^*+NF(\sigma^*)|=|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|,$$

由K类函数的性质，知φ的反函数φ^{-1}存在. 所以

$$|\sigma^*|\leqslant\varphi^{-1}|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|,$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当$\|\boldsymbol{e}(t_0)\|+|\xi(t_0)|<\delta$，有

$$|\sigma^*(t)|\leqslant\varphi^{-1}(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|)<\varepsilon,$$

且$\forall(\boldsymbol{e}(t_0),\xi(t_0))\in\mathbb{R}^{n+1}$，$|\sigma^*(t)|\leqslant\varphi^{-1}(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)-r\xi(t)|)\to 0$，当$t\to+\infty$. 故(3)式的零解关于$\sigma^*=0$绝对稳定，定理1证毕.

定理2 未加反馈控制的Lurie误差系统(3)式的零解绝对稳定(从而相应的M-S系统(1)和(2)全局同步)的充要条件是下列条件(i)与(ii)同时成立：

(i) 矩阵$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_3$均是Hurwitz矩阵，这里

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}r\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -r\end{bmatrix},\text{当 } N=0,$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{1+N} & \boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{d}r}{1+N}\\ \dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{1+N} & -\dfrac{r}{1+N}\end{bmatrix},\text{当 } N>0,$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\dfrac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{N} & \boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{d}r}{N}\\ -\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{N} & \dfrac{r}{N}\end{bmatrix},\text{当 } N<0;$$

(ii) (1)式的零解关于集合$\mathbb{Q}$是绝对稳定的.

证明

必要性

若$N=0$，取$F(\sigma^*)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi=\sigma^*$，则(3)式就变为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}r\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -r\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \xi(t)\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \xi(t)\end{pmatrix},\tag{4}$$

若$N\neq 0$，由$\sigma^*=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi-NF(\sigma^*)$，得$F(\sigma^*)=\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi-\sigma^*}{N}$，我们可以等价地改写(3)式为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{N} & -\dfrac{r}{N}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \xi(t)\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}F(\sigma^*)\\ -\dfrac{\sigma^*}{N}\end{bmatrix},\tag{5}$$

当$N>0$时，取$F(\sigma^*)=\sigma^*$，显然$|\sigma^*+NF(\sigma^*)|$正定，将$\sigma^*=\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi}{1+N}$代入(5)式，则(5)式可等价地写为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{N} & -\dfrac{r}{N}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \xi(t)\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi)}{1+N}\\ -\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi}{N(1+N)}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} A+\dfrac{dc^{\mathrm{T}}}{1+N} & b-\dfrac{dr}{1+N} \\ \dfrac{c^{\mathrm{T}}}{1+N} & -\dfrac{r}{1+N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}=B_2\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

当 $N<0$ 时，取 $F(\sigma^*)=-\dfrac{\sigma^*}{2N}$，显然 $|\sigma^*+NF(\sigma^*)|=\dfrac{1}{2}|\sigma^*|$ 正定，将 $\sigma^*=2(c^{\mathrm{T}}e-r\xi)$ 代入(5)式，便有

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & b \\ \dfrac{c^{\mathrm{T}}}{N} & -\dfrac{r}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dfrac{d(c^{\mathrm{T}}e-r\xi)}{N} \\ -\dfrac{2(c^{\mathrm{T}}e-r\xi)}{N} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} A-\dfrac{dc^{\mathrm{T}}}{N} & b+\dfrac{dr}{N} \\ -\dfrac{c^{\mathrm{T}}}{N} & \dfrac{r}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}=B_3\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

故 B_1，B_2，B_3 均应为 Hurwitz 矩阵，即条件(i)成立.

$\forall f\in\mathbb{F}$ 令 $\max[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|,\ |r|]=\gamma$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|e_i(t_0)|+|\xi(t_0)|<\delta$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|e_i(t)|+|\xi(t)|<\dfrac{\varepsilon}{\gamma}$，故 $\sum\limits_{i=1}^{n}|c_ie_i(t)|+|\gamma\xi(t)|\leqslant\gamma\cdot\dfrac{\varepsilon}{\gamma}=\varepsilon$.

$\forall(e(t_0),\xi(t_0))\in\mathbb{R}^{n+1}$，有

$$0\leqslant\lim_{t\to+\infty}|c^{\mathrm{T}}e(t)-r\xi(t)|\leqslant$$
$$\lim_{t\to+\infty}\Big[\sum_{i=1}^{n}|c_ie_i(t)|+|r\xi(t)|\Big]=0,$$

故(3)式的零解关于$\mathbb{Q}$绝对稳定.

充分性

利用(4)，(6)，(7)式可以将未加反馈控制的(3)式分别等价地改写为下列形式：

当 $N=0$，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}=B_1\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d(F(\sigma^*)-\sigma^*) \\ F(\sigma^*)-\sigma^* \end{pmatrix}, \tag{8}$$

当 $N>0$，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}=B_2\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d(F(\sigma^*)-\sigma^*) \\ F(\sigma^*)-\sigma^* \end{pmatrix}, \tag{9}$$

当 $N<0$，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}=B_3\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d(F(\sigma^*)-\sigma^*) \\ F(\sigma^*)+\dfrac{\sigma^*}{2N} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

以下先证(8)式的零解绝对稳定，从而相应的 M-S 系统(1)和(2)全局同步.

由常数变易法公式，(8)式的任意解可表示为

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}=\mathrm{e}^{B_1(t-t_0)}\begin{pmatrix} e(t_0) \\ \xi(t_0) \end{pmatrix}+$$
$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{B_1(t-\tau)}\begin{pmatrix} d(F(\sigma^*(\tau))-\sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau))-\sigma^*(\tau) \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

因为 B_1 为 Hurwitz 矩阵，故存在常数 $\zeta>0$，$M\geqslant 1$，使得

$$\|\mathrm{e}^{B_1(t-t_0)}\|\leqslant M\mathrm{e}^{-\zeta(t-t_0)},$$

又 $F(\sigma^*)-\sigma^*$ 连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使得 $\|\sigma^*\|<\sigma_1$，

$$|F(\sigma^*)-\sigma^*|<\frac{\zeta\varepsilon}{2\left\|\begin{matrix} d \\ 1 \end{matrix}\right\|M},$$

又因为(8)式的零解关于集合$\mathbb{R}$绝对稳定$\Leftrightarrow$关于 $\sigma^*=0$ 绝对稳定，故对 $\delta_1>0$，$\exists\delta>0$，使(8)式的解满足：当 $\left\|\begin{matrix} e\ (t_0) \\ \xi\ (t_0) \end{matrix}\right\|<\delta$，$\|\sigma^*(t)\|\leqslant\delta_1$，有

$$\left\|\int_{t_0}^{t}e^{B_1(t-\tau)}\begin{pmatrix} d(F(\sigma^*(\tau))-\sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau))-\sigma^*(\tau) \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau\right\|\leqslant$$
$$\int_{t_0}^{t}\|\mathrm{e}^{B_1(t-\tau)}\|\left\|\begin{pmatrix} d(F(\sigma^*(\tau))-\sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau))-\sigma^*(\tau) \end{pmatrix}\right\|\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{-\zeta(t-\tau)} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d} \\ 1 \end{matrix} \right\| \left\| F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \right\| \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\zeta\varepsilon \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\zeta(t-\tau)} \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

取 $\delta_2 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta\right\}$，对上述 ε. 当 $\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}(t_0) \\ \xi(t_0) \end{matrix} \right\| < \delta_2$，有

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}(t) \\ \xi(t) \end{matrix} \right\| \leqslant \| \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}_1(t-t_0)} \| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}(t_0) \\ \xi(t_0) \end{matrix} \right\| +$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}_1(t-\tau)} \right\| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \end{matrix} \right\| \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$M\mathrm{e}^{-\zeta(t-t_0)} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}(t_0) \\ \xi(t_0) \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d} \\ 1 \end{matrix} \right\| M \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\zeta(t-\tau)} \cdot$$

$$\| F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \| \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{12}$$

故系统(8)的零解稳定.

因为 $\mathrm{Re}[\lambda(\boldsymbol{B}_1)] < 0$，故(11)式的第一项趋于零，又因为 $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma^*(t) = 0$，$F(\sigma^*) - \sigma^*$ 连续，$F(0)=0$，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}[F(\sigma^*) - \sigma^*] = 0$，于是

$$\int_{t_0}^{t} \left\| \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}_1(t-\tau)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$M \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\zeta(t-\tau)} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \end{matrix} \right\| \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$M \frac{\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\zeta\tau} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \end{matrix} \right\| \mathrm{d}\tau}{\mathrm{e}^{\zeta t}},$$

当 $t \to +\infty$ 时，由 L'Hospital 法则有

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\zeta\tau} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau)) \\ F(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\tau) \end{matrix} \right\| \mathrm{d}\tau}{\mathrm{e}^{\zeta t}} =$$

$$\frac{1}{\zeta} \lim_{t\to+\infty} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*(t)) - \sigma^*(t)) \\ F(\sigma^*(t)) - \sigma^*(t) \end{matrix} \right\| = 0,$$

故有

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}(t) \\ \xi(t) \end{matrix} \right\| = 0, \tag{13}$$

从而系统(8)的零解绝对稳定，(8)式对应的 M-S 系统(1)与(2)全局同步.

因为(9)式与(8)式的非线性项完全一样，$\boldsymbol{B}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 的 Hurwitz 性质也完全相同，故(9)式零解的绝对稳定性与(8)式零解的绝对稳定性证明完全一样，故略. 虽然(10)式的非线性项与(8)的非线性项不同，但有以下估计式：

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d}(F(\sigma^*) - \sigma^*) \\ \frac{\sigma^*}{2N} + \sigma^* \end{matrix} \right\| \leqslant \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d} \\ \max\left[\frac{1}{2N}, 1\right] \end{matrix} \right\| \cdot (|F(\sigma^*)| + |\sigma^*|).$$

根据定理 1，关于集合 $\mathbb{Q}$ 的绝对稳定性蕴涵着：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3 > 0$，当 $|\sigma^*| < \delta_3$，有

$$|F(\sigma^*)| + |\sigma^*| < \frac{\zeta\varepsilon}{2\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{d} \\ \max\left[\frac{1}{2N}, 1\right] \end{matrix} \right\|},$$

且 $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma^*(t) = 0$ 蕴涵着：$\lim\limits_{t\to+\infty} [|F(\sigma^*(t))| + |\sigma^*(t)|] = 0$.

有了两不等式和等式，便可完全仿照(8)式零解的绝对稳定性的证明过程，证明(9)式的零解的绝对稳定性，定理 2 证毕.

定理 3 未加反馈控制的 Lurie 误差系统(3)的零解绝对稳定，从而它相应的 M-S 系统(1)与(2)全局同步的充要条件是下列条件(i)和(ii)同时满足：

(i) 定理(2)的条件(i)成立；

(ii) 存在关于 $\mathbb{Q}$ 正定且径向无界的 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{e}, \xi) \in C[\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}]$，使得 $\mathrm{D}^+ V(\boldsymbol{e}, \xi)|_{(3)}$ 关于 $\mathbb{Q}$ 负定.

证明 充分性. 由条件(ii)知存在 $\phi(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} - r\xi|) \in K\mathbb{R}$，和 $\psi(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} - r\xi|) \in K$，使得

$$\varphi(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} - r\xi|) \leqslant V(\boldsymbol{e}, \xi), \tag{14}$$

$$\mathrm{D}^+ V(\boldsymbol{e}, \xi)|_{(3)} \leqslant -\psi(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} - r\xi|), \tag{15}$$

故(3)式的零解关于 $\mathbb{Q}$ 绝对稳定.

从而由定理1知(3)式的零解关于$\sigma^*=0$绝对稳定，再利用条件(i)，余下可以依照定理(2)的充分性证明过程，证明(3)式的零解绝对稳定，从而对应的M-S系统(1)与(2)全局同步.

必要性. 虽然我们可以依照文献[27]定理1的必要性的证明来完成，但这里介绍一个更简洁的方法.

因为(3)式是一个自治系统，自治系统的全局一致渐近稳定性等价于全局渐近稳定性. 而全局一致渐近稳定的Lyapunov定理是可逆的[22]，即系统的零解全局一致渐近稳定的充要条件是存在径向无界的Lyapunov函数，它沿着系统的解的导数是负定的，而(3)式正是一个自治系统，因为它的零解绝对稳定，故对于$\forall F(\sigma)\in \mathbb{F}$，存在一个正定的径向无界的Lyapunov函数$V(\boldsymbol{e},\xi)\in C[\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}]$，及$\varphi(\sum_{i=1}^{n}|e_i|+|\xi|)\in K\mathbb{R}$，$\psi(\sum_{i=1}^{n}|e_i|+|\xi|)\in K$，使得

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}|e_i|+|\xi|\Big)\leqslant V(\boldsymbol{e},\xi)\ , \tag{16}$$

$$D^+V(\boldsymbol{e},\xi)|_{(3)}\leqslant-\psi\Big(\sum_{i=1}^{n}|e_i|+|\xi|\Big)\ , \tag{17}$$

令$\mu=\max[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|,\ |r_i|]$，则有

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi|)&:=\varphi\Big(\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi|\Big)\\ &\leqslant\varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|c_ie_i|+|r\xi|}{\mu}\right)\leqslant\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}|e_i|+|\xi|\Big)\\ &\leqslant V(\boldsymbol{e},\xi)\ ,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}D^+V(\boldsymbol{e},\xi)|_{(3)}&\leqslant-\psi\Big(\sum_{i=1}^{n}|e_i|+|\xi|\Big)\\ &\leqslant-\psi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|c_ie_i|+|r\xi|}{\mu}\right)\leqslant-\psi\Big(\frac{\|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi\|}{\mu}\Big)\\ &:=-\tilde{\psi}(\|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi\|)\ ,\end{aligned} \tag{19}$$

其中$\tilde{\varphi}\in K\mathbb{R}$，$\tilde{\psi}\in K$. 故条件(ii)成立. 定理3证毕.

3 部分变元的绝对稳定性与同步

上节结果的条件验证不方便，本节通过满秩线性变换，化关于$\mathbb{Q}$或$\sigma^*=0$的绝对稳定性为状态变量部分变元的绝对稳定性，得到一些简便的代数判据，是下节通过反馈控制实现绝对稳定及全局同步的重要依据.

先讨论$N=0$的情况. 此时，(3)式便是一般的Lurie间接控制系统. 由$\sigma^*=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-r\xi$得$\xi=\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-\sigma^*}{r}$，$\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}-r\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}-rF(\sigma^*)$，则未加控制项的(3)式便可等价地化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}=\Big(\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big)\boldsymbol{e}(t)-\dfrac{\boldsymbol{b}}{r}\sigma^*+\boldsymbol{d}F(\sigma^*)\\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big)\boldsymbol{e}(t)-\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}\sigma^*+(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r)F(\sigma^*)\ ,\end{cases} \tag{20}$$

σ^*，$\boldsymbol{e}(t)$为新的状态变量.

定理4 未加反馈控制的Lurie误差系统(20)的零解绝对稳定，从而(20)式对应的M-S系统(1)与(2)全局同步的充要条件是下列条件(i)和(ii)同时成立：

(i) 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\frac{\boldsymbol{b}}{r}+\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big) & -\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r\end{bmatrix}$

是Hurwitz矩阵；

(ii) (20)式的零解关于一个变元$\sigma^*=0$是绝对稳定的.

证 必要性. 令$F(\sigma^*)=\sigma^*$代入(20)式，由绝对稳定的定义可知条件(i)成立，条件(ii)是显然的.

充分性. 将(20)式改写为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma^*(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\frac{\boldsymbol{b}}{r}+\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big) & -\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \sigma^*(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r\end{pmatrix}F(\sigma^*(t))-\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r\end{pmatrix}\sigma^*(t)\ , \tag{21}$$

然后依照定理2的充分性的证明可完成其证明. 略.

推论4.1 若未加反馈的误差系统(20)式满足

(i) $\Big(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Big)$为一个Hurwitz矩阵；

(ii) (20)式的零解关于一个变元 $\sigma^*=0$ 绝对稳定.

则(20)式的零解绝对稳定，从而(20)式对应的 M-S 系统(1)与(2)是全局同步的.

证　因为条件(ii)已假设(20)式的零解关于部分变元 σ^* 绝对稳定，故只需证明(20)式的 $\boldsymbol{e}=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$关于零解绝对稳定.

对(20)式前 n 个方程形成的方程组用常数变易法公式便有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{e}(t)\| \leqslant & \left\| \mathrm{e}^{\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{bc}^{\mathrm{T}}\right)(t-t_0)}\boldsymbol{e}(t_0)\right\| + \\ & \int_{t_0}^{t}\left\|\mathrm{e}^{\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{bc}^{\mathrm{T}}\right)(t-\tau)}\right\| \max\left[\left\|\frac{\boldsymbol{b}}{r}\right\|, \|\boldsymbol{d}\|\right]\cdot \\ & [\,|\sigma^*(\tau)|\,] + |F(\sigma^*(\tau))|\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

余下与定理 2 充分性的证明类似，可完成最后证明. 推论 4.1 证毕.

令

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{bc}^{\mathrm{T}} & -\dfrac{\boldsymbol{b}}{r} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{bc}^{\mathrm{T}}\right) & -\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}\end{bmatrix} = \boldsymbol{H} = (h_{ij})_{(n+1)\times(n+1)},$$

推论 4.2　若未加反馈的误差系统(20)式满足

(i) 推论 4.1 的条件(i)成立；

(ii) 存在常数 $\gamma_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n+1$，使得

$$\gamma_j h_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1}\gamma_i |h_{ij}| \leqslant 0, j=1,2,\cdots,n, \quad (22)$$

且

$$\gamma_{n+1}h_{n+1,n+1} + \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i|h_{i,n+1}| \leqslant 0 \quad 与$$

$$\gamma_{n+1}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r) + \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i |d_i| \leqslant 0, \quad (23)$$

两个不等式至少有一个严格的不等式成立，则推论 4.1 的结论成立.

证　作正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{e},\sigma^*) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i|e_i| + \gamma_{n+1}|\sigma^*|,$$

易证

$$D^+ V|_{(20)} < 0, \quad 当\ \sigma^*\neq 0$$

故(20)式的零解关于 $\sigma^*=0$ 绝对稳定. 再仿照定理 2 的充分性的证明可完成余下的证明. 推论 4.2 证毕.

令
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{m\times m} & \boldsymbol{H}_{m\times(n+1-m)} \\ \boldsymbol{H}_{(n+1-m)\times m} & \boldsymbol{H}_{(n+1-m)\times(n+1-m)}\end{bmatrix}, \quad (24)$$

推论 4.3　若未加反馈的误差系统(20)式满足

(i) $\boldsymbol{H}_{m\times m}$为 Hurwitz 矩阵；

(ii) (20)式的零解关于 e_{m+1}，e_{m+2}，$\cdots$，e_n，σ^* 绝对稳定.

则推论 4.1 的结论成立.

证　令 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}=(e_1, e_2, \cdots, e_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}=(e_{m+1}, e_{m+2}, \cdots, e_n, \sigma^*)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}=(d_1, d_2, \cdots, d_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}=(d_{m+1}, d_{m+2}, \cdots, d_n, (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r))^{\mathrm{T}}$，将(20)式改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{H}_{m\times m}\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{H}_{m\times(n+1-m)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}F(\sigma^*) \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{H}_{(n+1-m)\times m}\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{H}_{(n+1-m)\times(n+1-m)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}F(\sigma^*),\end{cases} \quad (25)$$

将(25)式的第一个方程组的解用常数变易法表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}(t) = & \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}_{m\times m}(t-t_0)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}(t_0) + \\ & \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}_{m\times m}(t-\tau)}[\boldsymbol{H}_{m\times(n+1-m)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}(\tau) + \boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}F(\sigma^*(\tau))]\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \quad (26)$$

利用 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}(t)$关于(25)式的零解的绝对稳定性，然后再仿照定理 2 的充分性的证明，可以证明(25)式的零解绝对稳定，从而结论成立. 推论 4.3 证毕.

下面再讨论 $N\neq 0$ 的情况. 对(5)式作满秩线性变换：

$$\begin{cases}\eta_i = e_i \quad i=1,2,\cdots,n \\ \eta_{n+1} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} - r\xi,\end{cases} \quad (27)$$

简记为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \eta_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{G}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}\\ \xi\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\c_1&c_2&\cdots&c_n&-r\end{bmatrix},$$

则(5)式变为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\eta}_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}F(\sigma^*)\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}F(\sigma^*)+\dfrac{r\sigma^*}{N}\end{bmatrix},\tag{28}$$

其中

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{b}\\ \dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{N}&-\dfrac{r}{N}\end{bmatrix}\boldsymbol{G}^{-1},$$

从而(28)式的零解关于$\mathbb{Q}$绝对稳定等价于(28)式的零解关于一个变元$\eta_{n+1}=0$的绝对稳定性. 于是，仿定理2，我们有

定理5 未加反馈控制的Lurie控制系统(28)的零解绝对稳定，从而相应的M-S系统(1)与(2)全局同步的充要条件是

(i) $\bar{\boldsymbol{B}}_1=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}+\dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}}{1+N}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}+\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}}{1+N}+\dfrac{r}{N(1+N)}\end{bmatrix}$，当$N>0$，

$\bar{\boldsymbol{B}}_2=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}-\dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}}{N}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\dfrac{-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}}{N}+\dfrac{2r}{N}\end{bmatrix}$，当$N<0$，

为Hurwitz矩阵；

(ii) (28)式的零解关于部分变元$\eta_{n+1}=0$绝对稳定.

证 当$N>0$，取$F(\sigma^*)=\sigma^*$，将$\sigma^*=\dfrac{\eta_{n-1}}{1+N}$代入(28)式可得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\eta_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)\\ \eta_{n+1}(t)\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{d}}\dfrac{\eta_{n+1}}{1+N}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\dfrac{\eta_{n-1}}{1+N}+\dfrac{r\eta_{n-1}}{N(N+1)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}+\dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}}{1+N}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}+\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}}{1+N}+\dfrac{r}{N(N+1)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)\\ \eta_{n+1}(t)\end{pmatrix}=\bar{\boldsymbol{B}}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)\\ \eta_{n-1}(t)\end{pmatrix},\tag{29}$$

当$N<0$，取$F(\sigma^*)=-\dfrac{\sigma^*}{2N}$，将$\sigma^*=2\eta_{n-1}$代入(28)式便有

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\eta_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)\\ \eta_{n+1}(t)\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-\bar{\boldsymbol{d}}\dfrac{\eta(t)}{N}\\ \left(-\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}}{N}+\dfrac{2r}{N}\right)\eta_{n-1}(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\bar{\boldsymbol{b}}-\dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}}{N}\\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}-\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}}{N}+\dfrac{2r}{N}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)\\ \eta_{n-1}(t)\end{pmatrix}=\bar{\boldsymbol{B}}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)\\ \eta_{n-1}(t)\end{pmatrix},\tag{30}$$

余下可仿照定理2证明结论成立，略.

以下再引进一些记号.

令$\boldsymbol{\eta}^{(m)}=(\eta_1,\cdots,\eta_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}=(\eta_{m-1},\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{b}}^{(m)}=(\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_m)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{b}}^{(n-m)}=(\bar{b}_{m-1},\cdots,\bar{b}_n)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{d}}^{(m)}=(\bar{d}_1,\cdots,\bar{d}_m)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{d}}^{(n-m)}=(\bar{d}_{m-1},\cdots,\bar{d}_n)^{\mathrm{T}}$，

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times m}&\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times(n-m)}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{(n-m)\times m}&\bar{\boldsymbol{A}}_{(n-m)\times(n-m)}\end{bmatrix},$$

则可将(28)式改写为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}^{(m)}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times m}&\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times(n-m)}&\bar{\boldsymbol{b}}_m\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{m\times(n-m)}&\bar{\boldsymbol{A}}_{(n-m)\times(n-m)}&\bar{\boldsymbol{b}}_{(n-m)}\\ &\bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}&\bar{r}\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}^{(m)}\\ \boldsymbol{\eta}^{(n-m)}\\ \eta_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{d}}^{(m)}F(\sigma^*)\\ \bar{\boldsymbol{d}}^{(n-m)}F(\sigma^*)\\ \bar{r}\sigma^*\end{pmatrix}, \qquad (31)$$

定理6 未加反馈的误差动力系统(31)的零解是绝对稳定的，从而相应的M-S系统(1)与(2)全局同步的充要条件是

(i) $\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times m}$为Hurwitz矩阵；

(ii) 存在$V(\boldsymbol{\eta})\in C[\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}]$，和$\varphi(\|\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}\|+|\eta_{n+1}|)\in K\mathbb{R}$，$\psi(\|\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}\|+|\eta_{n+1}|)\in K$，使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}\|+|\eta_{n+1}|)\leqslant V(\boldsymbol{\eta}),D^+V|_{(31)}\leqslant -\psi(\|\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}\|+|\eta_{n+1}|).$$

证 由条件(ii)知，(31)式的零解关于部分变元$\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}$，$\eta_{n+1}$绝对稳定，现将(31)式的前$m$个方程的解用常数变易法表示为：

$$\boldsymbol{\eta}^{(m)}(t)=\mathrm{e}^{\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times m}(t-t_0)}\boldsymbol{\eta}^{(m)}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times m}(t-\tau)}(\bar{\boldsymbol{A}}_{m\times(n-m)}\boldsymbol{\eta}^{(n-m)}(\tau)+\bar{\boldsymbol{b}}^{(m)}\eta_{n+1}(\tau)+\bar{\boldsymbol{d}}^{(m)}F(\sigma^*(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

余下可仿照定理2充分性的证明可知其结论成立.略.

4 用反馈实现绝对稳定性及全局同步

一般不稳定的控制系统，理论上常可以通过施加反馈控制实现稳定，称为镇定. 但具体实现时，应建立在一些简便的稳定性代数充分条件基础上. 否则，哪怕是一般的非Hurwitz矩阵$\boldsymbol{A}$，如何选取不太保守的$\boldsymbol{K}$使$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}$为Hurwitz矩阵，验证也十分麻烦. 虽然Matlab计算软件的线性矩阵不等式工具箱为解决这类问题带来很多方便，但仍然只能针对一组特定的数字，需要试探，对一般情况则无准则可循.

在第2节中，我们给出了未加反馈控制的系统绝对稳定的一些简便实用的代数充分条件，不仅是设计一个绝对稳定的系统的依据，也是我们通过反馈控制来实现绝对稳定及相应系统同步的依据和准则.

先考虑对(20)式加上反馈控制：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\right)e(t)+\boldsymbol{K}e(t)-\dfrac{\boldsymbol{b}}{r}\sigma^*+\boldsymbol{\beta}\sigma^*+\boldsymbol{d}F(\sigma^*)+\tilde{\boldsymbol{\beta}}F(\sigma^*)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\sigma^*(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{r}\right)e(t)+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}e(t)-\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}\Big)\sigma^*+\alpha_{n+1}\sigma^*+(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r)F(\sigma^*)+\beta_{n+1}F(\sigma^*),\end{cases} \qquad (32)$$

其中$\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\mathrm{col}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}$，$\beta_{n+1}\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{\beta}=\mathrm{col}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\mathrm{col}(\tilde{\beta}_1,\cdots,\tilde{\beta}_n)$，反馈控制项为$\boldsymbol{K}e(t)$，$\boldsymbol{\beta}\sigma^*$，$\tilde{\boldsymbol{\beta}}F(\sigma^*)$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}e(t)$，$\alpha_{n+1}\sigma^*$，$\beta_{n+1}F(\sigma^*)$. 令$\begin{pmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \alpha_{n+1}\end{pmatrix}=\tilde{\boldsymbol{H}}=(\tilde{h}_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$.

定理7 在(32)式中，按下列方式选取反馈控制律：

(i) 选取$\boldsymbol{\beta}=\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\alpha}$；

(ii) 选取$\begin{cases}\alpha_{n+1}<\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}，且\ \beta_{n+1}=r-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\\[2ex] \alpha_{n+1}=\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}，且\ \beta_{n+1}<r-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\end{cases}$；

(iii) 选取矩阵$\boldsymbol{K}$，使得$\left(\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}\right)$为Hurwitz矩阵.

则在上述反馈控制律作用下，(32)式的零解绝对稳定，从而(32)式对应的M-S系统(1)与(2)全局同步.

证 对(32)式作径向无界的正定Lyapunov函数

$$V(e,\sigma^*)=|\sigma^*|,$$

由条件

$$D^+V|_{(32)}\leqslant\left(\alpha_{n+1}-\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}\right)|\sigma^*|+(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r+\beta_{n+1})|F(\sigma^*)<0,\quad 当\ \sigma^*\neq 0,$$

从而(32)式的零解关于部分变元$\sigma^*=0$绝对稳定. 而由条件(iii)知(32)式的前n个方程的线性部分的系数矩阵为Hurwitz矩阵，根据定理2或定理4的推论4.1的证明可知，(32)式的零解绝对稳定，从

而(1)与(2)式在上述反馈控制作用下全局同步. 证毕.

定理8 在(32)式中，选取如下形式的反馈控制律：

(i) 选取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=0$；

(ii) 选取 $\tilde{h}_{ij}$ 使之满足

$$h_{jj}+\tilde{h}_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|h_{ij}+\tilde{h}_{ij}|\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

且

$$\begin{cases}h_{n+1,n+1}+\tilde{h}_{n+1,n+1}+\sum\limits_{i=1}^{n}|h_{i,n+1}+\tilde{h}_{i,n+1}|\leqslant 0\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r+\beta_{n+1}+\sum\limits_{i=1}^{n}|d_i|\leqslant 0\end{cases}$$

中至少有一个严格的不等式成立；

(iii) 定理7的条件(iii)满足.

则(33)式的零解绝对稳定，从而(32)式对应的M-S系统(1)与(2)全局同步.

证 可以完全仿照定理4的推论4.5完成证明. 略.

定理9 在(32)式中，选取如下形式的反馈控制律：

(i) 选取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=-\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{r}$，$\left(\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{r}+\boldsymbol{K}\right)$为Hurwitz矩阵；

(ii) $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-r+\beta_{n+1}\leqslant 0$，$-\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{r}+\alpha_{n+1}=-\lambda<0$.

则在上述反馈控制作用下(32)式的零解是绝对稳定的，从而(32)式对应的M-S系统(1)与(2)全局同步.

证 因为$\left(\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{r}+\boldsymbol{K}\right)$为Hurwitz矩阵，故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{e}(t)\tag{33}$$

的解 $\boldsymbol{e}(t)=\mathrm{e}^{\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}\right)(t-t_0)}\boldsymbol{e}(t_0)$ 有估计式

$$\|\boldsymbol{e}(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-\zeta(t-t_0)},\quad M\geqslant 0,\zeta>0\tag{34}$$

对(33)式第二个方程作正定和径向无界的Lyapunov函数，

$$V=\frac{1}{2}(\sigma^{*}(t))^{2},$$

且令$\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{r}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{q}$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(32)}\leqslant-2\lambda V+\lambda V+\frac{1}{2\lambda}(\|\boldsymbol{q}\|\ \|\boldsymbol{e}(t)\|)^{2}.\tag{35}$$

考虑比较方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\lambda u+\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{q}\|\ \|\boldsymbol{e}(t)\|)^{2},\tag{36}$$

$$u(t)=\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}u_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\frac{1}{2\lambda}(\|\boldsymbol{q}\|\ \|\boldsymbol{e}(t)\|)^{2}\mathrm{d}t.\tag{37}$$

利用 $\boldsymbol{e}(t)\to 0$，当 $t\to+\infty$，仿照定理2充分性的证明可证：$u(t)\to 0$，从而 $V(t)\to 0$，$\sigma(t)\to 0$，当 $t\to+\infty$，从而结论成立. 定理9证毕.

5 对两个Chua氏混沌电路全局同步的应用

著名的Chua氏混沌电路不同于具有二次项的Lorenz系统、Rössler系统、Chen系统和Lü系统，它是用分段线性表示的足够简单，但有极丰富动力学性质的混沌系统. 但关于两个Chua氏电路同步的论文还不是很多，这里仅仅作为本文方法的具体应用，给出两个Chua氏电路全局同步的结果.

考虑两个分别作为发射系统和接受系统的Chua氏电路

$$\begin{cases}\dot{x}_d=P[-x_d+y_d-f(x_d)]\\ \dot{y}_d=x_d-y_d+z_d\\ \dot{z}_d=-qy_d,\end{cases}\tag{38}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_r=P[-x_r+y_r-f(x_r)]+u_1(x_d-x_r,y_d-y_r,z_d-z_r)\\ \dot{y}_r=x_r-y_r+z_r\qquad +u_2(x_d-x_r,y_d-y_r,z_d-z_r)\\ \dot{z}_r=-qy_r\qquad\qquad +u_3(x_d-x_r,y_d-y_r,z_d-z_r),\end{cases}\tag{39}$$

其中 $f(x)=bx+\dfrac{1}{2}(a-b)\ (|x+E|-|x-E|)$，

$a<b<0$，$0<E<+\infty$为常数．当 $p=10$，$q=14.87$，$a=-1.27$，$b=-0.68$，$E=1$ 时有如文献[30]中第82页所给的混沌吸引子仿真图．$u_i(i=1,2,3)$是状态变量的线性或非线性函数，满足 $u_i(0,0,0)=0$．令

$$e_x=x_d-x_r, e_y=y_d-y_r, e_z=z_d-z_r,$$
$$\boldsymbol{e}_X=(e_x,e_y,e_z), g(e_x)=-[f(x_d)-f(x_r)],$$

因为[31]

$$0\leqslant -b\leqslant \frac{-[f(x_d)-f(x_r)]}{x_d-x_r}=\frac{g(e_x)}{e_x}\leqslant -a<+\infty,$$

则可得到标准的 Lurie 型误差系统

$$\begin{cases}\dot{e}_x=-pe_x+pe_y+pg(e_x)+u_1(e_x,e_y,e_z)\\ \dot{e}_y=e_x-e_y+e_z+u_2(e_x,e_y,e_z)\\ \dot{e}_z=-qe_y+u_3(e_x,e_y,e_z),\end{cases}\tag{40}$$

且它的非线性反馈函数 $g(e_x)$中的反馈变量只为一个状态变量 e_x，在(40)式中选取控制律

$$u_1=-lg(e_x), l>p, u_2=u_3=0,$$

令 $l-p=\delta>0$，则(40)式变为

$$\begin{pmatrix}\dot{e}_x\\ \dot{e}_y\\ \dot{e}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p & p & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -q & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_x\\ e_y\\ e_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\delta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}g(e_x),\tag{41}$$

写成向量形式

$$\dot{\boldsymbol{e}}_X=\boldsymbol{A}_{3\times3}\boldsymbol{e}_X+\boldsymbol{b}_g(e_x),\tag{42}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{3\times3}=\begin{pmatrix}-p & p & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -q & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=(-\delta,0,0),$$

令

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=(1,0,0), \sigma=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_X,\quad \boldsymbol{e}_X=(e_x\, e_y\, e_z),$$

容易验证 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$为 Hurwitz 矩阵．故(42)式是标准的 Lurie 直接控制系统，于是，我们可用著名的 S 方法来研究(42)式的零解的绝对稳定性，从而得到(42)式对应的(38)与(39)式全局同步的结果．

定理 10 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists s>0$ 使得下列矩阵

$$\boldsymbol{R}(s):=\begin{pmatrix} & & & -h_{11}\delta-\frac{p}{2}+\frac{s}{2}\\ & \boldsymbol{HA}_{3\times3}+\boldsymbol{A}_{3\times3}^{\mathrm{T}}H & & -h_{21}\delta+\frac{p}{2}\\ & & & -h_{31}\delta\\ -h_{11}\delta-\frac{p}{2}+\frac{s}{2} & -h_{21}\delta+\frac{p}{2} & -h_{31}\delta & -\delta-\frac{s}{|a|+\varepsilon}\end{pmatrix}$$

负定．则(41)式的零解绝对稳定，从而(38)与(39)式全局同步．这里 $\boldsymbol{H}$ 为 Lyapunov 矩阵方程

$$\boldsymbol{HA}_{3\times3}+\boldsymbol{A}_{3\times3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}_{3\times3}\tag{43}$$

的对称正定矩阵解，$B_{3\times3}$为给定的对称矩阵，h_{11}，h_{21}，h_{31}为 H 的第一列元素．

证 作 Lurie-Lyapunov 型正定，径向无界函数

$$V=\boldsymbol{e}_X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{He}_X+\int_0^{e_x}g(e_x)\mathrm{d}e_x,$$

沿用(42)式的解对 V 求导且利用 S 程序有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(42)}=\boldsymbol{e}_X^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{HA}_{3\times3}+\boldsymbol{A}_{3\times3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})\boldsymbol{e}_X+(2\boldsymbol{Hb}+\boldsymbol{A}_{3\times3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_Xg(e_x)-\delta g^2(e_x)=\boldsymbol{e}_X^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{HA}_{3\times3}+\boldsymbol{A}_{3\times3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})\boldsymbol{e}_X+\left[2\begin{pmatrix}-h_{11}\delta\\ -h_{21}\delta\\ -h_{31}\delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-p\\ p\\ 0\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_Xg(e_x)-\delta g^2(e_x)=\begin{pmatrix}e_x\\ e_y\\ e_z\\ g(e_x)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{3\times 3}+\boldsymbol{A}_{3\times 3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} & \begin{matrix} -h_{11}\delta-\frac{p}{2}+\frac{s}{2} \\ -h_{21}\delta+\frac{p}{2} \\ -h_{31}\delta \end{matrix} \\ -h_{11}\delta-\frac{p}{2}+\frac{s}{2} \quad -h_{21}\delta+\frac{p}{2} \quad -h_{31}\delta & -\delta-\frac{s}{|a|+\varepsilon} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ g(e_x) \end{bmatrix} - sg(e_x)\left(e_x-\frac{1}{|a|+\varepsilon}g(e_x)\right)<0, \text{当} \; \|e_x\| \neq 0. \tag{44}$$

(44)式说明了(42)式的零解绝对稳定. 定理10证毕.

参 考 文 献

1 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atoms Sci, 1963, 20: 130—141

2 Lorenz E N. The Essence of Chaos. USA: University of Washington Press, 1993

3 Stewart I. The Lorenz attractor exists. C R Acad Sci Paris, 1999, 328: 1197—1202

4 Rössler O E. An equation for continuous chaos. Physics Letters A, 1976, 57(5): 397—398

5 Rössler O E. Continuous chaos-four prototype equations. Annals New York Academy of Sciences, 1979, 316: 376—392

6 Chua L O, Itoh M, Kocarev L, et al. Chaos synchronization in Chua's circuits. Journal of Circuits Systems and Computers, 1993, 3(1): 93—108

7 Madan R. Chua's Circuits: A Paradign for Chaos. Singapore: World Scientific, 1993

8 陈关荣,吕金虎著. Lorenz系统族的动力学分析、控制与同步. 北京:科学出版社, 2003

9 Liu W, Chen G. A new chaotic system and its generation. Int J Bifur & Chaos, 2003, 13(1): 262—267

10 Liu C, Liu T, Liu L, et al. A new chaotic attractor chaos. Chaos, Solitons & Fractors, 2004, 22: 1031—1038

11 Yang X S, Li Q D. Chaotic attractor in an simple hybrid system. Int J Bifur & Chaos, 2002, 12(10): 2255—2256

12 Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. Phys Rev Lett, 1990, 64: 1196—1199

13 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821—824

14 Carroll T L, Pecora L M. Synchronization in chaotic circuits. IEEE Trans on CAS, 1991, CAS-38(4): 453—456

15 Curran P F, Chua L O. Absolute stability theory and synchronization problem. Int J Bifur & Chaos, 1997, 7: 1375—1383

16 Suykens J A K, Curran P F, Chua L O. Robust synthesis for master-slave synchronization of Lur'e systems. IEEE Trans on Circuits & Systems(I), 1999, 46(7): 842—850

17 Suykens J A K, Curran P F, Chua L O. Master-slave synchronization using dynamical output feedback. Int J Bifur & Chaos, 1997, 7: 671—679

18 Liao X X, Chen G R, Wang H O. On global synchronization of chaotic systems. Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems, 2003, 10(6): 865—872

19 Liao X X, Chen G R. On feedback-controlled synchronization of chaotic systems. Int J Sys Sci, 2003, 34(7): 454—461

20 Liao X X, Chen G R. Chaos synchronization of general Lurie systems via time-delay feedback control. Int J Bifur & Chaos, 2003, 13(1): 207—213

21 廖晓昕. 稳定性的数学理论和应用. 武汉:华中师范大学出版社, 2001

22 Liao X X. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. Amsterdam: Kluwer Academic Publisher, 1993, Holand; Beijing: China Science Press, 1993, China

23 Fu Y L, Liao X X, Jiang Z H, et al. The equilibrium position analysis and the estimation of the stable region of the Turboalternator generation system. Automation of Electric Power Systems, 2000, 24(8): 6—9

24 Jiang Z H, Chen S J, Fu Y L, et al. A study on the subsynchronous resonance of electric power systems with controllable series connected compensation capacitance. Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering, 2000, 20(6): 47—52

25 Liao X X. Necessary and sufficient conditions for absolute stability of Lurie indirect control systems. Science in China, Series A, 1989, 32(9): 1047—1061

26 廖晓昕. 论鲁里叶直接控制系统绝对稳定的充要条件. 数学物理学报, 1989, 9(1): 75—82

27 廖晓昕. 一般鲁里叶控制系统绝对稳定的新判据. 数学学报, 1990, 33(21): 841—852

28 年晓红. 具有多个独立执行机构的Lurie控制系统的鲁棒稳定性. 自动化学报, 1998, 24(4): 562—566

29 年晓红. Lurie控制系统的鲁棒绝对稳定性. 控制理论与应用, 1995, 12(5): 641—645

30 Chen G R, Dong X. From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. Singapore: World Scientific Pub Co, 1998

31 Liao X X, Luo H G, Zhang G, et al. Some new results on global synchronization of Chua's Circuit. Acta Automatica Sinica, 2005, 3(2): 320—326